Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
MA1116. Matemáticas III.

GUIA 8: **Base y dimensión.**

1. Hallar en cada caso, la intersección de los subespacios siguientes:
   (a) $H_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}$, $\quad H_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 0\}$.
   (b) $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y = 0\}$, $\quad W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + 2y = 0\}$.
   (c) $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2z = 0\}$, $\quad H_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + z = 0\}$.

2. Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Se pide:
   (a) Hallar una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga al vector $(1,2,3)$.
   (b) Extraer todas las bases posibles de $\mathbb{R}^3$ formadas por vectores del conjunto $\{(1,2,3),\ (1,-1,1),\ (4,2,1),\ (1,5,1)\}$.

3. Para cada subespacio de $\mathbb{R}^3$ encontrar una base y calcular su dimensión:
   (a) $\{(x,y,z) : x - y + 2z = 0, \ \ 2x + y + 3z = 0\}$.
   (b) $\{(x,y,z) : x - 2y + 3z = -3x + 6y - 9z\}$.
   (c) $\{(x,y,z) : x + 2y - z = 0, \ \ 2y + 2z = 0, \ \ x + 4y + 3z = 0\}$.

4. Un polinomio $p(x)$ es par si $p(x) = p(-x)$ y es impar si $p(x) = -p(-x)$. Demostrar que los conjuntos de todos los polinomios pares y de todos los impares son subespacios vectoriales de $\mathcal{P}$. Si se consideran los de grado menor igual que n, demostrar que son subespacios vectoriales de $\mathcal{P}_n$ y hallar sus dimensiones, así como bases de los mismos.

5. Dados los vectores $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n$ y v de un espacio vectorial, se consideran los subespacios $H = \text{gen}\{\overrightarrow{v}_1, \rightarrow_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n\}$ y $W = \text{gen}\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n, \overrightarrow{v}\}$ Demostrar que $\dim H = \dim W$ o $\dim H = \dim W + 1$.

6. En $\mathcal{P}_1$ se consideran los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ tales que $p(-3) \neq 0$, $q(5) \neq 0$ y $p(5) = q(-3) = 0$. Demostrar que $\{p(x),\ q(x)\}$ es una base de $\mathcal{P}_1$.

7. Sea $\{\overrightarrow{v}_1,\ \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n\}$ un conjunto de $\mathbb{R}^n$ y sea A una matriz de tamaño $m \times n$.
   (a) Si A es invertible demostrar que $\{A\overrightarrow{v}_1,\ A\overrightarrow{v}_2, \ldots, A\overrightarrow{v}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ si y sólo si $\{\overrightarrow{v}_1,\ \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n\}$es una base de $\mathbb{R}^n$.
   (b) Si $\{A\overrightarrow{v}_1,\ A\overrightarrow{v}_2, \ldots, A\overrightarrow{v}_n\}$es una base de $\mathbb{R}^n$, demostrar que A es invertible.

8. Demostrar que

$$H = \{x_1,\ x_2, x_3,\ x_4 : 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0; \ x_2 = x_3\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ y hallar una base y la dimensión del mismo.